数理解析研究所講究録
1187 巻 2001 年 187-198

W-mappingによる収束定理と制約可能性問題

下地 一也 (KAZUYA SHIMOJI)
東京工業大学情報理工学研究科

1 Introduction

$C_1,C_2,\ldots,C_n$ をその共通部分 C_0 が空でない Hilbert 空間 H の閉凸集合とし, 距離射影 $P_i:H\longrightarrow C_i(i=1,2,\ldots,n)$ が与えられているものとする. これから C_0 の元を求めるという問題は, 制約可能性問題と関係があり, 具体的な例で表現すると, H 上で定義された r 個の連続凸関数 $\{g_1,g_2,\ldots,g_r\}:H\longrightarrow\mathbf{R}$ と $f:H\longrightarrow\mathbf{R}$ が与えられたとき,

$$f(x_0)=\min_{x\in\bigcap_{i=1}^{n}C_i}f(x)=\alpha$$

となる $x_0\in C_0$ を見つけよ. という問題である. これは, function f から g_{n+1} と C_{n+1} を

$$\begin{aligned} g_{n+1}&=f-\alpha,\\ C_{n+1}&=\{x\in E:f(x)-\alpha\leq 0\}\end{aligned}$$

作り出してみると,

$$x_0\in\bigcap_{i=1}^{n+1}C_i$$

となる $x_0\in E$ を見つけよ. というシンプルな問題に帰着できる.

そこで, この $x_0\in E$ をどうやって見つけるか?という問題が上がるが, それに対して例えば, Crombez[2] は Hilbert 空間上で, 距離射影 P_i と恒等写像 I で構成された有限個のある写像族の convex combination によって弱収束するということを示し, しばらくして, 北原-高橋 [3] と高橋-田村 [11] はこれを uniformly convex な Banach 空間に拡張した.

また, nonexpansive 写像 T による iteration scheme には, 代表的な iteration が 2 つあるが, それは Mann による iteration

$$x_0 = x \in H, \quad x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

そして, Halpern による iteration

$$x_0 = x \in H, \quad x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n)Tx_n \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

これらによる点列でもって近似する方法がある.

厚芝-高橋 [1] は有限個の nonexpansive 写像によって生成された W-mapping による Halpern'type iteration で強収束定理による点列近似が与えられているが, 今回の発表は可算無限個の nonexpansive 写像による強収束定理を証明した.

2 Lemmas

C を Banach 空間 E の convex 集合とし, $T_1, T_2, \ldots$ を C から C 自身への写像族, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ を $0 \leq \alpha_i \leq 1 (i = 1, 2, \ldots)$ となる実数とする. その時, 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して, $W_n{:}C \longrightarrow C$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned}
U_{n,n+1} &= I, \\
U_{n,n} &= \alpha_n T_n U_{n,n+1} + (1-\alpha_n)I, \\
U_{n,n-1} &= \alpha_{n-1} T_{n-1} U_{n,n} + (1-\alpha_{n-1})I, \\
&\vdots \\
U_{n,k} &= \alpha_k T_k U_{n,k+1} + (1-\alpha_k)I, \\
U_{n,k-1} &= \alpha_{k-1} T_{k-1} U_{n,k} + (1-\alpha_{k-1})I, \\
&\vdots \\
U_{n,2} &= \alpha_2 T_2 U_{n,3} + (1-\alpha_2)I, \\
W_n = U_{n,1} &= \alpha_1 T_1 U_{n,2} + (1-\alpha_1)I.
\end{aligned}$$

このように定義した W_n を $T_n, T_{n-1}, \ldots, T_1$ と $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1$ によって生成された W-*mapping* と呼ぶ.

W-mapping を可算個の写像族に対しても定義できるようにするために, 次の Lemma を用意した.

Lemma 2.1 C を *strictly convex Banach* 空間 E の空でない *closed convex* 集合とする. $T_1, T_2, \ldots$ を C から C 自身への *nonexpansive* 写像とし $\bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \emptyset$ を満たしているものとする. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ を $0 < \alpha_i \leq b < 1 (i = 1, 2, \ldots)$ を満たす実数とする. この時, 任意の $x \in C$, $k \in \mathbf{N}$ に対して, $\lim_{n\to\infty} U_{n,k}x$ が存在する.

Sketch of the proof. かってに $x \in C$, $w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ をとってくる. 一般性を失う事なしに, $x \neq w$ と仮定してよい. $k \in \mathbf{N}$ を固定しておく. 任意の $n \in \mathbf{N}(n \geq k)$ に対して,

$$\|U_{n+1,k}x - U_{n,k}x\| \leq \left(\prod_{i=k}^{n} \alpha_i\right) \|U_{n+1,n+1}x - U_{n,n+1}x\| \leq 2b^{n-k+2}\|x - w\|$$

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $n_0 \in \mathbf{N}(n_0 \geq k)$ が存在して s.t.

$$b^{n_0-k+2} < \frac{\varepsilon(1-b)}{2\|x-w\|}.$$

とできる. すると, 任意の $m, n(m > n > n_0)$ に対して,

$$\|U_{m,k}x - U_{n,k}x\| \leq \sum_{j=n}^{m-1} \|U_{j+1,k}x - U_{j,k}x\| \leq 2\|x - w\| \sum_{j=n}^{m-1} b^{j-k+2} < \varepsilon.$$

これより $\{U_{n,k}x\}$ は Cauchy 列, ゆえに $\lim_{n\to\infty} U_{n,k}x$ が存在する. ■

上の Lemma より $U_{\infty,k}(k \in \mathbf{N})$,$W$ を次のように定義できる:

$$U_{\infty,k}x := \lim_{n\to\infty} U_{n,k}x,$$

$$Wx := \lim_{n\to\infty} W_n x = \lim_{n\to\infty} U_{n,1}x$$

for every $x \in C$. このような W を T_1,T_2,... と α_1,α_2,... から生成された *W-mapping* と呼ぶ.

Lemma 2.2 C を *strictly convex Banach* 空間 E の空でない *closed convex* 集合とする. $T_1, T_2, \ldots$ を C から C 自身への *nonexpansive* 写像とし $\bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \emptyset$ を満たしているものとする. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ を $0 < \alpha_i \leq b < 1 (i = 1, 2, \ldots)$ を満たす実数とする. この時, $F(W) = \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i)$ となる.

Sketch of the proof. $w \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i)$ とする. その時, 明らかに任意の $n, k \in \mathbf{N}(n \geq k)$ に対して $U_{n,k}w = w$ が成立する. よって, 任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して, $U_{\infty,k}w = w$. 特に $Ww = U_{\infty,1}w = w$ であるから,

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \subset F(W).$$

次に,

$$F(W) \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i).$$

を示す. かってに $x \in F(W)$, $y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i)$ をとってくる.

$$\begin{aligned}
& \|W_n x - W_n y\| \\
\leq \; & \left(\prod_{i=1}^{k-1} \alpha_i\right) \|\alpha_k(T_k U_{n,k+1} x - T_k U_{n,k+1} y) + (1-\alpha_k)(x-y)\| \\
& + \left(1 - \prod_{i=1}^{k-1} \alpha_i\right) \|x - y\| \\
\leq \; & \left(\prod_{i=1}^{k} \alpha_i\right) \|T_k U_{n,k+1} x - T_k U_{n,k+1} y\| + \left(1 - \prod_{i=1}^{k} \alpha_i\right) \|x - y\| \\
\leq \; & \|x - y\|.
\end{aligned}$$

$n \to \infty$ とすると,

$$\begin{aligned}
& \|Wx - Wy\| \\
\leq \; & \left(\prod_{i=1}^{k-1} \alpha_i\right) \|\alpha_k(T_k U_{\infty,k+1} x - T_k U_{\infty,k+1} y) + (1-\alpha_k)(x-y)\| \\
& + \left(1 - \prod_{i=1}^{k-1} \alpha_i\right) \|x - y\| \\
\leq \; & \left(\prod_{i=1}^{k} \alpha_i\right) \|T_k U_{\infty,k+1} x - T_k U_{\infty,k+1} y\| + \left(1 - \prod_{i=1}^{k} \alpha_i\right) \|x - y\| \\
\leq \; & \|x - y\|.
\end{aligned}$$

$\|Wx - Wy\| = \|x - y\|$ であり任意の $i \in \mathbf{N}$ に対して $0 < \alpha_i < 1$ であるから, 任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して,

$$\begin{aligned}
& \|\alpha_k(T_k U_{\infty,k+1} x - T_k U_{\infty,k+1} y) + (1-\alpha_k)(x-y)\| \\
= \; & \|T_k U_{\infty,k+1} x - T_k U_{\infty,k+1} y\| = \|x - y\|.
\end{aligned}$$

E は strictly convex で, $y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i)$ だから,

$$x - y = T_k U_{\infty,k+1} x - T_k U_{\infty,k+1} y = T_k U_{\infty,k+1} x - y$$

ゆえに

$$x = T_k U_{\infty,k+1} x.$$

一方,

$$U_{n,k+1}x = \alpha_{k+1}T_{k+1}U_{n,k+2}x + (1-\alpha_{k+1})x,$$

である事より,

$$\begin{aligned} U_{\infty,k+1}x &= \alpha_{k+1}T_{k+1}U_{\infty,k+2}x + (1-\alpha_{k+1})x \\ &= \alpha_{k+1}x + (1-\alpha_{k+1})x \\ &= x. \end{aligned}$$

よって, 任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して,

$$x = T_k U_{\infty,k+1}x = T_k x.$$

これより $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i)$ となるので, $F(W) \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i)$ がいえる. 以上の事から,

$$F(W) = \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i).$$

■

次の Lemma 2.3 は後の Main Theorem を証明するために, Lemma 2.6 とセットになっているものである.

Lemma 2.3 *C を Banach 空間 E の空でない closed convex 集合とする. $T_1, T_2, \ldots$ を C から C 自身への nonexpansive 写像とし $\bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \emptyset$ を満たしているものとする. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ を $0 \leq \alpha_i \leq b < 1 (i = 1, 2, \ldots)$ を満たす実数とする. 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して, W_n を $T_n, T_{n-1}, \ldots, T_1$ と $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1$ によって生成された W-mapping とする. $\{\beta_n\}$ を $0 \leq \beta_n \leq 1 (n = 1, 2, \ldots)$ となる実数の列で, $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$ と $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty$ を満たしているものとする. $\{x_n\}$ を*

$$x_1 = x \in C \quad x_{n+1} = \beta_n x + (1-\beta_n)W_n x_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

によって定義された点列とする. この時, $\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$.

Sketch of the proof. かってに $x \in C$ と $f \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ をとってくる. $D = \{z \in C \mid \|f - z\| \leq \|f - x\|\}$ とおくと, D は C の有界な closed convex となる部分集合で, 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して $T_n D \subset D$ を満たす. こ

れより一般性を失う事なしに, C を有界と仮定してよい. $K=\sup_{z\in C}\|z\|$ とおくと, 各 $n\in\mathbf{N}$ に対して評価すると,

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1}-x_n\|\\
\le\ &(1-\beta_n)\|x_n-x_{n-1}\|+2K|\beta_n-\beta_{n-1}|+(1-\beta_n)\|W_nx_n-W_{n-1}x_n\|\\
\le\ &(1-\beta_n)\|x_n-x_{n-1}\|+2K|\beta_n-\beta_{n-1}|+2K\left(\prod_{i=1}^{n}\alpha_i\right).
\end{aligned}$$

上の不等式を使うと, 各 $m\in\mathbf{N}$ に対して,

$$\|x_{m+2}-x_{m+1}\|\le 2K(1-\beta_{m+1})+2K|\beta_{m+1}-\beta_m|+2K\left(\prod_{i=1}^{m+1}\alpha_i\right)$$

となり, 同様に,

$$\begin{aligned}
\|x_{m+3}-x_{m+2}\| &\le 2K\exp\left(-\sum_{l=m}^{m+1}\beta_{l+1}\right)+2K\sum_{l=m}^{m+1}|\beta_{l+1}-\beta_l|\\
&\quad +2K\sum_{l=m}^{m+1}\left(\prod_{i=1}^{l+1}\alpha_i\right).
\end{aligned}$$

ゆえに, 任意の $m,n=1,2,\dots$ に対して,

$$\begin{aligned}
\|x_{m+n+1}-x_{m+n}\| &\le 2K\exp\left(-\sum_{l=m}^{m+n-1}\beta_{l+1}\right)+2K\sum_{l=m}^{m+n-1}|\beta_{l+1}-\beta_l|\\
&\quad +2K\frac{b^m(1-b^n)}{1-b}
\end{aligned}$$

がいえる. $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n=\infty$ である事から, 任意の $m=1,2,\dots$ に対して

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\| &= \limsup_{n\to\infty}\|x_{m+n+1}-x_{m+n}\|\\
&\le 2K\sum_{l=m}^{\infty}|\beta_{l+1}-\beta_l|+2K\frac{b^m}{1-b}.
\end{aligned}$$

さらに, $\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_{n+1}-\beta_n|<\infty$ である事から,

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|\le 2K\lim_{m\to\infty}\sum_{l=m}^{\infty}|\beta_{l+1}-\beta_l|+2K\lim_{m\to\infty}\frac{b^m}{1-b}=0,$$

ゆえに

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0.$$

■

次の Proposition と Lemma は後の Theorem を証明するために, それぞれ, 塩路-高橋 [5], S. Reich[4] から引用したものである.

Proposition 2.4 (塩路-高橋) a を実数とし, $(a_1, a_2, \ldots)$ を任意の *Banach limits* μ に対して $\mu_n(a_n) \leq a$ で, かつ $\limsup_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) \leq 0$ を満たす l^∞ の元とする. その時, $\limsup_{n\to\infty} a_n \leq a$ となる.

Lemma 2.5 (S. Reich) E を *uniformly Gâteaux* 微分可能な *norm* をもつ *uniformly convex* な *Banach* 空間とし, C を E の空でない *closed convex* 集合とする. T を C から C 自身への *nonexpansive* 写像とし, $F(T) \neq \emptyset$ であるものとする. この時, 一意に *onto* である *sunny nonexpansive retraction* $P{:}C \longrightarrow F(T)$ が存在する. さらに, 任意の $x \in C$ に対して,

$$u_k = \frac{1}{k}x + \left(1 - \frac{1}{k}\right) Tu_k \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

によって $\{u_k\} \subset C$ があたえられた時, $\{u_k\}$ は $Px \in F(T)$ に強収束する.

Lemma 2.3 とセットになっている Lemma 2.6 を示す.

Lemma 2.6 E を *uniformly Gâteaux* 微分可能な *norm* をもつ *uniformly convex* な *Banach* 空間とし, C を E の空でない *closed convex* 集合とする. $T_1, T_2, \ldots$ を C から C 自身への *nonexpansive* 写像とし $\bigcap_{i=1}^\infty F(T_i) \neq \emptyset$ を満たしているものとする. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ を $0 < \alpha_i \leq b < 1 (i = 1, 2, \ldots)$ を満たす実数とする. 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して, W_n を $T_n, T_{n-1}, \ldots, T_1$ と $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1$ によって生成された W-mapping とする. $\{\beta_n\}$ を $0 \leq \beta_n \leq 1 (n = 1, 2, \ldots)$ となる実数の列で, $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$ と $\sum_{n=1}^\infty |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$, $\sum_{n=1}^\infty \beta_n = \infty$ を満たしているものとする. $\{x_n\}$ を

$$x_1 = x \in C \quad x_{n+1} = \beta_n x + (1 - \beta_n) W_n x_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

によって定義された点列とする. この時, $\limsup_{n\to\infty}\langle x - Px, J(x_n - Px)\rangle \leq 0$, が成り立つ. ここで $P{:}C \longrightarrow F(W) = \bigcap_{n=1}^\infty F(T_n)$ は一意な *onto* である *sunny nonexpansive retraction* ($W = \lim_{n\to\infty} U_{n,1}$) であるものとする.

Sketch of the proof. Lemma 2.3の証明でのように, Cを有界と仮定しても一般性を失わない. 各$k \in \mathbf{N}$に対して, u_kを$u_k = \frac{1}{k}x + \left(1 - \frac{1}{k}\right) W u_k$を満たす$C$の一意な元とする. Lemma 2.4より, $P{:}C \longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$を一意なontoであるsunny nonexpansive retractionとすると,

$$k \longrightarrow \infty \quad \Longrightarrow \quad u_k \longrightarrow Px \in F(W) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n).$$

$K = \sup_{z \in C} \|z\|$とすると, 任意の$n, k \in \mathbf{N}$に対して評価すると,

$$\|x_{n+1} - W u_k\| \leq 2\beta_n K + \|x_n - u_k\| + \|W_n u_k - W u_k\|.$$

を得る. $\lim_{n \to \infty} \beta_n = 0$である事と可算個の写像族に対する$W$-mappingの定義$W u_k = \lim_{n \to \infty} W_n u_k \quad (\forall k \in \mathbf{N})$により, 任意のBanach limit μに対して,

$$\mu_n \|x_n - W u_k\|^2 = \mu_n \|x_{n+1} - W u_k\|^2 \leq \mu_n \|x_n - u_k\|^2.$$

点列$\{U_k\}$を構成するときに利用した等式$u_k = \frac{1}{k}x + \left(1 - \frac{1}{k}\right) W u_k$を変形すると, $\left(1 - \frac{1}{k}\right)(x_n - W u_k) = (x_n - u_k) - \frac{1}{k}(x_n - x)$となるから,

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 \|x_n - W u_k\|^2 \quad &\geq \quad \left(1 - \frac{2}{k}\right) \|x_n - u_k\|^2 \\ &\quad + \frac{2}{k} \langle x - u_k, J(x_n - u_k) \rangle.\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 \mu_n \|x_n - u_k\|^2 \quad &\geq \quad \left(1 - \frac{2}{k}\right) \mu_n \|x_n - u_k\|^2 \\ &\quad + \frac{2}{k} \mu_n \langle x - u_k, J(x_n - u_k) \rangle\end{aligned}$$

この不等式を整理すると,

$$\begin{aligned}\frac{1}{k^2} \mu_n \|x_n - u_k\|^2 \quad &\geq \quad \frac{2}{k} \mu_n \langle x - u_k, J(x_n - u_k) \rangle \\ \frac{1}{2k} \mu_n \|x_n - u_k\|^2 \quad &\geq \quad \mu_n \langle x - u_k, J(x_n - u_k) \rangle.\end{aligned}$$

$k \to \infty \Longrightarrow u_k \to Px \in F(W) = \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i)$ であるから, 上の不等式と E の norm の uniformly Gâteaux 微分可能性より,

$$0 \geq \mu_n \langle x - Px, J(x_n - Px) \rangle.$$

一方, Lemma 2.3 より,

$$\lim_{n\to\infty} |\langle x - Px, J(x_{n+1} - Px)\rangle - \langle x - Px, J(x_n - Px)\rangle| = 0.$$

ゆえに, Proposition 2.4 から不等式

$$\limsup_{n\to\infty} \langle x - Px, J(x_n - Px)\rangle \leq 0.$$

が導かれる. ■

3 Strong convergence theorem and applications

ここでは, 最初に制約可能性と関係のある強収束定理を証明する.

Theorem 3.1 (下地-高橋) *E を uniformly Gâteaux 微分可能な norm をもつ uniformly convex な Banach 空間とし, C を E の空でない closed convex 集合とする. $T_1, T_2, \ldots$ を C から C 自身への nonexpansive 写像とし $\bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \emptyset$ を満たしているものとする. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ を $0 < \alpha_i \leq b < 1 (i = 1, 2, \ldots)$ を満たす実数とする. 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して, W_n を $T_n, T_{n-1}, \ldots, T_1$ と $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1$ によって生成された W-mapping とする. $\{\beta_n\}$ を $0 \leq \beta_n \leq 1 (n = 1, 2, \ldots)$ となる実数の列で, $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$ と $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty$ を満たしているものとする. $\{x_n\}$ を*

$$x_1 = x \in C \quad x_{n+1} = \beta_n x + (1 - \beta_n) W_n x_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

によって定義された点列とする. この時, $\{x_n\}$ は $Px \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ に強収束する. ここで $P:C \longrightarrow F(W) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ は一意な onto である sunny nonexpansive retraction $(W = \lim_{n\to\infty} U_{n,1})$ であるものとする.

Sketch of the proof. $Px \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i)$ であることから, 不等式

$$\|W_n x_n - Px\| \leq \|x_n - Px\|, \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$

が成立している. 点列 $\{x_n\}$ を構成する式 $x_{n+1} = \beta_n x + (1-\beta_n)W_n x_n$ を変形して得られる式 $(1-\beta_n)(W_n x_n - Px) = (x_{n+1} - Px) - \beta_n(x - Px)$ より

$$(1-\beta_n)^2\|W_n x_n - Px\|^2 \geq \|x_{n+1} - Px\|^2 - 2\beta_n\langle x - Px, J(x_{n+1} - Px)\rangle.$$

が成立するので, 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して,

$$\|x_{n+1}-Px\|^2 \leq (1-\beta_n)\|W_n x_n - Px\|^2 + 2(1-(1-\beta_n))\langle x-Px, J(x_{n+1}-Px)\rangle$$

Lemma 2.6 より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $m \in \mathbf{N}$ が存在して, s.t.

$$\langle x - Px, J(x_n - Px)\rangle \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall n \geq m).$$

よって,

$$\|x_{m+1} - Px\|^2 \leq (1-\beta_m)\|x_m - Px\|^2 + (1-(1-\beta_m))\varepsilon.$$

同様にして,

$$\|x_{m+2} - Px\|^2 \leq \left\{\prod_{l=m}^{m+1}(1-\beta_l)\right\}\|x_m - Px\|^2 + \left\{1 - \prod_{l=m}^{m+1}(1-\beta_l)\right\}\varepsilon.$$

以下, 同じようにしていくと,

$$\|x_{m+n} - Px\|^2 \leq \left\{\prod_{l=m}^{m+n-1}(1-\beta_l)\right\}\|x_m - Px\|^2 + \left\{1 - \prod_{l=m}^{m+n-1}(1-\beta_l)\right\}\varepsilon$$

を得る. 条件 $\sum_{l=m}^{\infty}\beta_l = \infty$ より $\prod_{l=m}^{\infty}(1-\beta_l) = 0$ がいえるので, ゆえに,

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_n - Px\|^2 = \limsup_{n\to\infty}\|x_{m+n} - Px\|^2 \leq \varepsilon.$$

ここで, $\varepsilon > 0$ は任意であったから, $\limsup_{n\to\infty}\|x_n - Px\|^2 \leq 0$. これより $\{x_n\}$ が $Px \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i)$ に強収束することがいえる. ■

次の Theorem 3.2 は Theorem 3.1 の応用で, 制約可能性問題と関係がある Theorem である.

Theorem 3.2 (下地-高橋) E を *uniformly Gâteaux* 微分可能な *norm* をもつ *uniformly convex* な *Banach* 空間とし, C を E の空でない *closed convex* 集合とする. $\{C_n\}$ を C の *nonexpansive retracts* の列で, $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$ を満たしているものとし, 各 $P_k (k \in \mathbf{N})$ は C から C_k への *onto* な *nonexpansive retraction* であるとする. $T_1, T_2, \ldots$ を C から C 自身への *nonexpansive* 写像とし $\bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \emptyset$ を満たしているものとする. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ を $0 < \alpha_i \leq b < 1 (i = 1, 2, \ldots)$ を満たす実数とする. 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して, W_n を $P_n, P_{n-1}, \ldots, P_1$ と $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1$ によって生成された W-mapping とする. $\{\beta_n\}$ を $0 \leq \beta_n \leq 1 (n = 1, 2, \ldots)$ となる実数の列で, $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$ と $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty$ を満たしているものとする. $\{x_n\}$ を

$$x_1 = x \in C \quad x_{n+1} = \beta_n x + (1 - \beta_n) W_n x_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

によって定義された点列とする. この時, $\{x_n\}$ は $Px \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ に強収束する. ここで $P{:}C \longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ は一意な *onto* である *sunny nonexpansive retraction* $(W = \lim_{n\to\infty} U_{n,1})$ であるものとする.

Proof. 任意の $u \in C$ に対して, $Wu = \lim_{n\to\infty} W_n u$ とおくと, If $Wu = \lim_{n\to\infty} W_n u$ for every $u \in C$, Lemma 2.2 より $F(W) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(P_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. がいえる. よって Theorem 3.1 を使う事によって, $\{x_n\}$ が $Px \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ に強収束することがいえる. ■

参考文献

[1] S. Atsushiba and W. Takahashi, Strong convergence theorems for a finite family of nonexpansive mappings and applications, *Indian J. Math.*, to appear.

[2] G. Crombez, Image recovery by convex combinations of projections, *J. Math. Anal. Appl.*, **155** (1991), 413–419.

[3] S. Kitahara and W. Takahashi, Image recovery by convex combinations for sunny nonexpansive retractions, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, **2** (1993), 333–342.

[4] S. Reich, Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **75** (1980), 287–292.

[5] N. Shioji and W. Takahashi, Strong convergence theorems of approximated sequences for nonexpansive mappings in Banach spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125** (1997), 3641–3645.

[6] W. Takahashi, Fixed point theorems for families of nonexpansive mappings on unbounded sets, *J. Math. Soc. Japan*, **36** (1984), 543–553.

[7] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Kindai-kagakusha, Tokyo, 1988. (Japanese)

[8] W. Takahashi, Fixed point theorems and nonlinear ergodic theorems for nonlinear semigroups and their applications, *Nonlinear Analysis*, **30** (1997), 1283–1293.

[9] W. Takahashi, Weak and strong convergence theorems for families of nonexpansive mappings and their applications, *Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska*, **51** (1997), 277–292.

[10] W. Takahashi and K. Shimoji, Convergence theorems for nonexpansive mappings and feasibility problems, *Math. Comput. Modelling*, to appear.

[11] W. Takahashi amd T. Tamura, Limit theorems of operators by convex combinations for nonexpansive retractions in Banach spaces, *J. Approximation Theory*, **91** (1997), 386–397.